MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Avril 2015

Révisions de Pâques

Calcul Différentiel

Exercice 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, g et h trois fonctions de $U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose que f et g sont différentiables en $a \in U$ et que $f(a) = h(a)$. Justifier que $D(h-g)(a) = 0$. En déduire que g est différentiable en a et calculer $Dg(a)$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f'(x)\right| < 1.$$

Le Jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$$

est-il inversible ?

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne et de sa norme euclidienne, $N(.) = \|.\|_2$.

1. Montrer que N est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = f(N(x))x$. Calculer la différentielle de F et montrer que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle DF(x).h, h\rangle \geqslant f(N(x))N(x)^2.$$

Exercice 6. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left((x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \frac{(x-1)^3-(y-1)^3}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right) & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}, \\ (1,0) & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \left(2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), 0\right) & \text{si } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

1. Calculer les dérivées partielles de f sur l'ensemble $A = \{(x,y),\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.
2. En déduire si f est différentiable ou non sur A.

Exercice 8. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Extrema

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 10. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = y\left(x^2 + \ln(y)^2\right)$ sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

Exercice 12. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$.

Exercice 13. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$. Vérifier que la différentielle de $F(x, y) = f(x)f(y)$ en $(0, 0)$ est nulle et montrer que $(0, 0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local.

Exercice 15. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$.

Exercice 16. Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique suivante $q(x, y) = x^2 + y^2 + 2z(x - y)$.

Exercice 17. Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique suivante $q(x, y) = xy + yz + zt + tx$.

Suites et Séries de Fonctions

Exercice 18. La suite de fonctions $f_n(x) = x^{2n} \ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Exercice 19. La suite de fonctions $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Exercice 20. La suite de fonctions

$$f_n(x) = n^2 x^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^n}{2n+1} \right)$$

converge-t-elle simplement sur $[0, 1]$? uniformément ?

Exercice 21. Etudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'on n'a pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
2. Calculer la somme $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ et montrer que l'on n'a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.

Exercice 23. Montrer que la suite de fonction $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0,+\infty[$

Exercice 24. On pose $u_n(x)=x^{n+1}\ln(x)$ si $x\in[0,1]$ et $u_n(0)=0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ ne converge pas uniformément.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n(x)$ converge uniformément.

Exercice 25.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Séries Entières

Exercice 26. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\ln(n)z^n$.

Exercice 27. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n$.

Exercice 28.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{ch}(an)x^n$.
2. Calculer la somme totale $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{ch}(an)x^n$.

Exercice 29. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où $a_n=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 30. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\arctan\left(n^\alpha\right) z^n$ en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 31. Développer en série entière en 0 la fonction $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Exercice 32. Développer en série entière en 0 la fonction $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$.

Exercice 33. Montrer que la fonction $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\ln^n(n)z^n$.

Questions de cours

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle Df.
2. Vrai ou faux : l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout x associe $\langle x, x\rangle$ est linéaire.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dérivées partielles pour qu'une fonction soit $\mathscr{C}^1$.
4. Pour deux fonctions f et g différentiables sur de bons ensembles, donner la formule de la différentielle de la composée, $D_x(f \circ g).h$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
6. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
7. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
8. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
9. Si la Hessienne est non-définie et négative que dire de la nature du point critique ?
10. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.
11. Écrire la définition d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f sur un intervalle I.
12. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I.
13. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
14. Donner le développement en série entière de $\cos(x)$.
15. Donner le développement en série entière de $(1 + x)^\alpha$.
16. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement. Que dire de ces rayons si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n)$.
17. Écrire la série de Taylor d'une fonction f en 0.
18. Écrire les primitives de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et donner leur(s) rayon(s) de convergence.
19. Énoncer le théorème d'interversion $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$.
20. Quel type de convergence faut-il pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions paires pour que la fonction limite f soit également paire.

Le Pictionamaths

1. Un plan tangent
2. Un gradient
3. Un projecteur orthogonal
4. Une symétrie orthogonale
5. Une application coordonnée
6. Un minimum local
7. Un minimum global
8. Un point selle
9. Une suite de fonctions ne convergeant pas simplement
10. Une suite de fonction convergeant simplement
11. Une suite de fonction convergeant uniformément
12. Un rayon de convergence